Análisis Numérico I/Modelación Numérica/Métodos Matemáticos y Numéricos			Facultad de Ingeniería. Universidad de Buenos Aires.	
2° Cuatrimestre 2019	Cursos: 4/2/6 (Schwarz-Sosa)	Parcial. 1° Oportunidad	Tema 1 (5)	Nota
Padrón: 99768	Apellido y Nombres: FORCINITI BIANCA			9 (Nueve)

Ejercicio 1. Con los datos de la tabla se ha construido:

- Interpolaciones por Spline y Hermite-Newton tomando puntos desde X0 en adelante, **pero sin incluir a X1**.
- Ajuste por Cuadrados Mínimos tomando puntos desde X0 en adelante.
- Interpolación por Lagrange Baricéntrico según se indica.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	x_0	2.5	x_2	4	x_4	x_5
y_i	y_0	y_1	4	y_3	12	16

$$A1 = \begin{vmatrix} 5 & nd & nd \\ 14.5 & nd & nd \\ nd & nd & nd \end{vmatrix} \quad B1 = \begin{vmatrix} 26 \\ nd \\ nd \end{vmatrix} \quad A2 = \begin{vmatrix} nd & nd & 0 & 0 \\ nd & nd & nd & 0 \\ 0 & nd & nd & nd \\ 0 & 0 & nd & nd \end{vmatrix}$$

$$S_0(x_1) = 3.68917624 \qquad w_1^{1,3,4,5} = -0.0592592593 \qquad LB(x_1) = 3 \qquad C_1 = 0.10344828$$

$$P(x) = 1 + 2.(x-0) + nd.(x-0)^2 + nd.(x-0)^2.(x-x_2) + nd.(x-0)^2.(x-x_2).(x-x_3)$$

$$B_0 = 2 \quad D_0 = 0.07279693$$

1. Indicar para cada interpolación qué puntos se usaron, el grado y la cantidad de polinomios resultantes.
2. A partir de la información de Hermite-Newton, obtener toda la información disponible para $i = 0$
3. A partir de la información de Spline, obtener el coeficiente C_0 correspondiente al polinomio $S_0(x)$
4. Con la información de Spline, Newton y la obtenida al momento, obtenga una ENOL para hallar h_0 de Spline
5. Resuelva la ENOL con un método de orden $1 < \alpha < 2$ eligiendo un intervalo y criterio de corte apropiados.
6. Con la información de Cuadrados Mínimos, Lagrange Baricéntrico y la obtenida al momento, obtenga el resto de los x_i e y_i.
7. Indicar qué grado máximo de polinomio de Hermite-Newton podría obtenerse si se conocieran todos los datos ocultos en el ejercicio.

Ejercicio 2. Dada la matriz $A(x, y)$ que se muestra a continuación, se pide:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ x & 0 & y \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

1. Sabiendo que $x >> y > 1$ y que $\|A^{-1}\| = y$, obtener $k(A)$ como función de las variables x, y
2. Construyendo la gráfica de proceso para $kA(x, y)$, obtener las expresiones de Cp y Te ¿Qué puede decir sobre la condición del problema? ¿Y sobre la estabilidad del algoritmo?
3. Realice 3 iteraciones por el método de Gauss-Seidel para resolver el SEL $A.x = B$
4. Indicar para qué criterio de corte y para qué tolerancia adoptaría la tercer iteración realizada como solución del SEL
5. ¿Es esperable la convergencia de Gauss-Seidel para esta matriz A? ¿Y para el método de Jacobi?

Ejercicio 3. Indicar a qué método corresponde el siguiente bloque de Python y detectar cuáles son los 3 errores que impedirían que el mismo llegue a un resultado correcto:

```
In [1]:     for i in range (0,n):
                X1[i] = B[i]
                for k in range(0,i):
                    X1[i] += A[i,k]*X1[k]
                for k in range(i+1,n):
                    X1[i] -= A[i,k]*X0[k]
                X1[i] += A[i,i]
                X1[i] *= (1-w)
                X1[i] += (1-w)*X0[i]
```

99768

Bianca
Forcinitti

1

Ejercicio 1

i	0	1	2	3	4	5
x_i		2,5		4		
y_i			4		12	16

Spline:
(no incluye x_1 desde x_0)

$$A_2 = \begin{bmatrix} nd & nd & 0 & 0 \\ nd & nd & nd & 0 \\ 0 & nd & nd & nd \\ 0 & 0 & nd & nd \end{bmatrix}$$

$S_0(x_1) = 3,68917624$

$C_1 = 0,10344828$

$B_0 = 2$ $\quad D_0 = 0,07279693$

Cuadrados Minimos:
(desde x_0)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & nd & nd \\ 14,5 & nd & nd \\ nd & nd & nd \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 26 \\ nd \\ nd \end{bmatrix}$$

Lagrange Baricentrico:

$LB(x_1) = 3$

$W_1^{1,3,4,5} = -0,0592592593$

Hermite - Newton:
(desde x_0 sin incluir a x_1)

$$P(x) = 1 + 2(x-0) + nd(x-0)^2 + nd(x-0)^2 (x-x_2) + nd(x-0)^2 (x-x_2)(x-x_3)$$

1

Spline (Grado 3)

Ptos = 4 (x_0, x_2, x_3, x_4)
grado = 3 (los polinomios son trazadores cúbicos)
CANTIDAD de polinomios = 3

Cuadrados Minimos

Ptos = 5 = $A_{11} = \sum_{i=0}^{n} x_i^0$ (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)

grado = 2

CANTIDAD DE polinomios = 1

LAGRANGE BARICENTRICO

(Correcto)

Ptos = 4 (x_1, x_3, x_4, x_5)

grado = 3

CANT de polinomios = 1

HERMITE - NEWTON

(Correcto)

Ptos = 5 (en realidad son 4 efectivamente porque el x_0 repite ⇒ utiliza: $(x_0, x_0, x_2, x_3, x_4)$)

grado = 4

CANT DE polinomios = 1

② c/ Hermite-Newton obtener toda la info. para $i=0$

$$P(x) = f(x_0) + f(x_0,x_0)(x-x_0) + f(x_0,x_0,x_2)(x-x_0)^2(x-x_2) + \dots$$

Comparando con el polinomio dado:

$f(x_0) = 1 \Rightarrow \boxed{Y_0 = 1}$ (Correcto)

$f(x_0,x_0) = 2 \Rightarrow f'(x_0) = 2 \Rightarrow \boxed{Y'_0 = 2}$ (Correcto)

$(x-x_0) = (x-0) \Rightarrow \boxed{X_0 = 0}$ (Correcto)

porque el enunciado dice que toma ptos desde x_0

③ c/ Spline, obtener C_0 correspondiente al polinomio $S_0(x)$

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x-x_0) + C_0(x-x_0)^2 + d_0(x-x_0)^3$$

donde $a_0 = f(x_0) = Y_0 = 1$

$$\Rightarrow S_0(x_1 = 2{,}5) = 1 + 2 \cdot (2{,}5-0) + C_0(2{,}5-0)^2 + 0{,}07279693(2{,}5-0)^3 = 3{,}68917624$$

$$\Rightarrow C_0 \cdot 2{,}5^2 = 3{,}68917624 - 7{,}137452031$$

$$\boxed{C_0 = -0{,}5517241266}$$

(Correcto)

④ c/ Spline, c/Newton obtenga una ENOL para hallar h_0 de Spline

$h_0 = x_2 - x_0$ porque no utiliza el pto x_1

99768

Bianca
Forcinito

MATRIZ de Spline

porque no incluye a x_1 !

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 \\ 0 & 0 & h_2 & 2h_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\left[f(x_0,x_2) - f'(x_0)\right] \\ 3\left[f(x_2,x_3) - f(x_0,x_2)\right] \\ 3\left[f(x_3,x_4) - f(x_2,x_3)\right] \\ 3\left[f'(x_4) - f(x_3,x_4)\right] \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 2h_0 \cdot c_0 + h_0 \cdot c_1 = 3\left[f(x_0,x_2) - f'(x_0)\right]$

$2 \cdot c_0 \cdot h_0 + c_1 \cdot h_0 = 3\left[\dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - y'_0\right]$ donde $\begin{cases} y_2 = 4 \\ y_0 = 1 \\ y'_0 = 2 \\ x_2 - x_0 = h_0 \end{cases}$

$2 c_0 h_0 + c_1 h_0 = 3\left[\dfrac{4-1}{h_0} - 2\right]$

$2 c_0 h_0 + c_1 h_0 = \dfrac{9}{h_0} - 6.$

$2 \cdot c_0 h_0 + c_1 h_0 - \dfrac{9}{h_0} + 6 = 0.$ Multiplico $\times h_0$

$2 \cdot c_0 h_0^2 + c_1 h_0^2 + 6 h_0 - 9 = 0.$ donde $c_0 = -0{,}55172412\,66$
$c_1 = 0{,}10344828$

$$\boxed{-1 h_0^2 + 6 h_0 - 9 = 0} \rightarrow \text{ENOL}$$

⑤ Resuelva la ENOL c/ Met de orden $1 < \alpha < 2$ eligiendo un intervalo y criterio de corte apropiados

La ENOL que obtuve es una función cuadrática que tiene una raiz doble por lo que no puedo utilizar ni el Método de la bisección ni Regula Falsi

(*) $f(x) = -h_0^2 + 6h_0 - 9$

⑥ c/ CM , c/ LB obtener el resto de los x_i e y_i

$\boxed{h_0 = 3} = x_2 - x_0 = x_2 - 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 3}$ (Correcto)

de LB:

$$w_1^{1,3,4,5} = \frac{1}{(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)} = \frac{1}{(2{,}5-4)(2{,}5-x_4)(2{,}5-x_5)} = -0{,}0592592593$$

$$\Rightarrow (2{,}5-x_4)(2{,}5-x_5) = 11{,}25 \quad a)$$

$LB(x_1) = 3 \rightarrow f(x_1) = 3$ porque utiliza el Pto x_1 para armar el polinomio de Lagrange Baricentrico
(Correcto)

Como la interpolación pasa necesariamente por los puntos que utiliza, entonces: $\boxed{y_1 = 3}$ (Correcto)

de CM: en la matriz A1:

$$A_{22} = \sum_{i=0}^{n} x_i^1 = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14{,}5$$

$$0 + 2{,}5 + 3 + 4 + x_4 = 14{,}5 \Rightarrow \boxed{x_4 = 5}$$ (Correcto)

∴ de a) $(2{,}5-5)(2{,}5-x_5) = 11{,}25$

$$2{,}5 - x_5 = -4{,}5 \Rightarrow \boxed{x_5 = 7}$$ (Correcto)

en el vector B1:

$$b_1 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^0 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 26$$

$$1 + 3 + 4 + y_3 + 12 = 26 \Rightarrow \boxed{y_3 = 6}$$

(Correcto)

Entonces la tabla queda:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	2,5	3	4	5	7
y_i	1	3	4	6	12	16
y'_i	2					

(Correcto)

NOTA

10 3,000244141

99768

Bianca
Forcinit

(7) Si utilizase todos los puntos $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$

serían 6 puntos en total de los cuales conozco $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$

pero además conozco y'_0 y si conociese el vector B_2 de Spline:

$$B_2 = \begin{bmatrix} 3\,[f(x_0,x_2) - f'(x_0)] \\ 3\,[f(x_2,x_3) - f(x_0,x_2)] \\ 3\,[f(x_3,x_4) - f(x_2,x_3)] \\ 3\,[f'(x_4) - f(x_3,x_4)] \end{bmatrix}$$

(Correcto)

↳ podría conocer también y'_4 (Correcto)

Entonces en total tendría 8 elementos, por lo que el grado máximo de polinomio sería 7

(*) Utilizo el Método de Newton-Raphson para hallar la solución. (Debería usar Método de la Secante)

Este método no es de orden $1 < \alpha < 2$ pero ya probé con otros métodos y no convergen. Probé con Pto Fijo con 3 g(x) diferentes y no converge. También probé con AITKEN pero converge lentamente y no dispongo de más tiempo, por lo que tomo el intervalo [2,5 ; 3,5] y valor semilla = 3,25. Resuelvo c/ Newton-Raphson

$$x^{<i+1>} = x^{<i>} - \frac{f(x^{<i>})}{f'(x^{<i>})} \qquad \varepsilon = \frac{|x^{<i+1>} - x^{<i>}|}{|x^{<i+1>}|} < TOL = 10^{-4}$$

$f'(x) = -2h_0 + 6$

i	$x^{<i>}$	ε	$\varepsilon < TOL$?
0	3,25	↓	↓
1	3,125		
2	3,0625		
3	3,03125		
4	3,015625		No
5	3,0078125		
6	3,00390625		
7	3,001953125		
8	3,000976562		
9	3,000488281	$\varepsilon = 8,14 \times 10^{-5}$	Sí
10	3,00024441		

⇒ Solución aproximada: $\boxed{h_0 = 3,000244141}$

Solución exacta: $\boxed{h_0 = 3}$

(Correcto)

99768
Bianca Forciniti

Ejercicio 2

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ x & 0 & y \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

① $x \gg y > 1$ $\quad \|A^{-1}\| = y$ $\quad$ obtener $K(A)$

$$K(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$$

$$\|A\|_\infty = \max \{ 1+x \; ; \; y^{-1} \; ; \; x+y \}$$

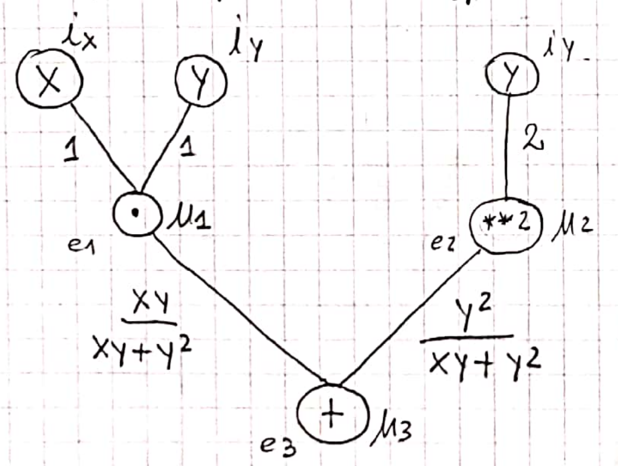
Analizo cada uno:

- y^{-1}: como $y > 1 \Rightarrow y^{-1}$ siempre será < 1
- como $y > 1 \Rightarrow x+y > x+1$

$\therefore \|A\|_\infty = x+y$ porque $x \gg y$

$\Rightarrow K(A) = (x+y) \cdot y \Rightarrow \boxed{K(A) = xy + y^2}$ (Correcto)

② gráfica de procesos. Cp y Te



(Correcto)

$e_1 = i_x \cdot 1 + i_y \cdot 1 + \mu_1 = i_x + i_y + \mu_1$

$e_2 = i_y \cdot 2 + \mu_2 = 2\, i_y + \mu_2$

$$e_3 = \frac{xy}{xy+y^2} \cdot e_1 + \frac{y^2}{xy+y^2} e_2 + \mu_3$$

$$e_3 = \frac{xy}{xy+y^2}(ix + iy + \mu_1) + \frac{y^2}{xy+y^2}(2iy + \mu_2) + \mu_3 = e_{TOT}$$

Busco la cota del error total : $|ix|, |iy| < \rho$

$|\mu_1|, |\mu_2|, |\mu_3| < \mu$

$$e_{TOT} = \Bigg[\underbrace{\left|\frac{xy}{xy+y^2}\right| + \left|\frac{xy}{xy+y^2} + \frac{2y^2}{xy+y^2}\right|}_{Cp}\Bigg]\rho + \Bigg[\underbrace{\left|\frac{xy}{xy+y^2}\right| + \left|\frac{y^2}{xy+y^2}\right|}_{Te} + |1|\Bigg]\mu$$

$\therefore$

$$\boxed{Cp = \left|\frac{xy}{xy+y^2}\right| + \left|\frac{xy+2y^2}{xy+y^2}\right|}$$

$$\boxed{Te = \left|\frac{xy}{xy+y^2}\right| + \left|\frac{y^2}{xy+y^2}\right| + 1}$$

(Correcto

Si $Cp >> 1 \Rightarrow$ el problema estará mal condicionado (No) $\Rightarrow x >> y$

Si $Te >> 1 \Rightarrow$ el algoritmo es inestable (No)

③ 3 iteraciones x gauss Seidel para SEL $A.X = B$

Tomo $X^{<0>} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

gauss - Seidel :

$$x_i^{<k+1>} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{<k+1>} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{<k>}}{a_{ii}}$$

1° iteración

$$x_1^{<1>} = \frac{b_1 - a_{12} \cdot x_2^{<0>} - a_{13} \cdot x_3^{<0>}}{a_{11}}$$

$$x_1^{<1>} = \frac{1 - 0 \cdot 2 - x \cdot 3}{1} = 1 - 3x$$

Bianca Forcinito 99765

$$x_2^{<1>} = \frac{b_2 - a_{21}\, x_1^{<1>} - a_{23}\, x_3^{<0>}}{a_{22}}$$

$$x_2^{<1>} = \frac{2 - 0 \cdot (1-3x) - 0 \cdot 3}{y^{-1}} = \frac{2}{y^{-1}} = 2y$$

$$x_3^{<1>} = \frac{b_3 - a_{31}\, x_1^{<1>} - a_{32}\, x_2^{<1>}}{a_{33}}$$

$$x_3^{<1>} = \frac{3 - x\,(1-3x) - 0 \cdot 2y}{y} = \frac{3 - x(1-3x)}{y}$$

$$x^{<1>} = \begin{bmatrix} 1-3x \\ 2y \\ \frac{3-x(1-3x)}{y} \end{bmatrix}$$

2° iteración

$$x_1^{<2>} = \frac{b_1 - a_{12}\, x_2^{<1>} - a_{13}\, x_3^{<1>}}{a_{11}}$$

$$x_1^{<2>} = \frac{1 - 0 \cdot 2y - x \cdot \left(\frac{3 - x(1-3x)}{y}\right)}{1} = 1 - x\left(\frac{3 - x(1-3x)}{y}\right)$$

$$x_2^{<2>} = \frac{b_2 - a_{21}\, x_1^{<2>} - a_{23}\, x_3^{<1>}}{a_{22}}$$

$$x_2^{<2>} = \frac{2 - 0 \cdot x_1^{<2>} - 0 \cdot x_3^{<1>}}{y^{-1}} = 2y$$

$$x_3^{<2>} = \frac{b_3 - a_{31}\, x_1^{<2>} - a_{32}\, x_2^{<2>}}{a_{33}}$$

$$x_3^{<2>} = \frac{3 - x\left(1 - x\left(\frac{3-x(1-3x)}{y}\right)\right) - 0 \cdot x_2^{<2>}}{y}$$

$$x_3^{<2>} = \frac{3 - x + x^2\left(\frac{3 - x(1-3x)}{y}\right)}{y}$$

$$x^{<2>} = \begin{bmatrix} 1 - x\left(\frac{3-x(1-3x)}{y}\right) \\ 2y \\ \frac{3 - x + x^2\left(\frac{3-x(1-3x)}{y}\right)}{y} \end{bmatrix}$$

3° iteración

$$x_1^{<3>} = \frac{b_1 - a_{12}\; x_2^{<2>} - a_{13}\, x_3^{<2>}}{a_{11}}$$

$$x_1^{<3>} = \frac{1 - 0 \;\; x_2^{<2>} - x \;\; x_3^{<2>}}{1}$$

$$x_1^{<3>} = 1 - x . \left[\frac{3 - x + x^2 \left(\frac{3 - x(1-3x)}{y} \right)}{y} \right]$$

$$x_2^{<3>} = \frac{b_2 - a_{21} \;\; x_1^{<3>} - a_{23} \;\; x_3^{<2>}}{a_{22}}$$

$$x_2^{<3>} = \frac{2 - 0 . x_1^{<3>} - 0 . \;\; x_3^{<2>}}{y^{-1}} = 2y$$

$$x_3^{<3>} = \frac{b_3 - a_{31} \;\; x_1^{<3>} - a_{32}\; x_2^{<3>}}{a_{33}}$$

$$x_3^{<3>} = \frac{3 - x \;\; x_1^{<3>} - 0 \;\; x_2^{<3>}}{y}$$

$$x_3^{<3>} = \frac{3 - x \left\{ 1 - x . \left[\frac{3 - x + x^2 \left(\frac{3 - x(1-3x)}{y} \right)}{y} \right] \right\}}{y}$$

$$\therefore \quad X^{<3>} = \begin{bmatrix} 1 - x \left[\frac{3 - x + x^2 \left(\frac{3 - x(1-3x)}{y} \right)}{y} \right] \\ \\ 2y \\ \\ \frac{3 - x \left\{ 1 - x \left[\frac{3 - x + x^2 \left(\frac{3 - x(1-3x)}{y} \right)}{y} \right] \right\}}{y} \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

queda en función de x y de y

99768

Bianca Forcuniti

HOJA N° 6

FECHA

(4) Criterio de corte: $\dfrac{|x^{<k+1>} - x^{<k>}|}{|x^{<k+1>}|} < TOL$

Si: $\dfrac{|x^{<3>} - x^{<2>}|}{|x^{<3>}|} < TOL = 10^{-5}$

Tolerancia adoptada

entonces adoptaria $x^{<3>}$ como la solución del SEL

(5) • Gauss-Seidel converge si la matriz A es:

A – estrictamente diagonal dominante

B – simetrica ✓ ⇒ $A = A^T$

C – definida positiva

(*) A – en la fila 1: $1 < x + 0$ porque $x >> y > 1$

⇒ No es estrictamente diagonal dominante

Por lo que el Metodo GS NO converge (Correcto)

• Jacobi converge si la matriz A es:

– estrictamente diagonal dominante

Como demostré antes (*) no es est. diagonal dominante

⇒ El Metodo Jacobi no converge (Correcto)

NOTA

Ejercicio 3

Se trata del METODO de las SOBRERELAJACIONES : SOR

(Correcto)

```
for i in range(0,n):
    x1[i] = B[i]
    for k in range(0,i):
        x1[i] += - A[i, k] * x1[k]        (Corregido)
    for k in range(i+1, n):
        x1[i] -= A[i, k] * x0[k]
    x1[i] += / A[i, i]                     (Corregido)
    x1[i] *= (1-w)  w                      (Corregido)
    x1[i] += (1-w) * x0[i]
```

SOR :

$$x_i^{\langle k+1\rangle} = (1-w)\, x_i^{\langle k\rangle} + w \cdot \left[\frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{\langle k+1\rangle} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{\langle k\rangle}}{a_{ii}} \right]$$

NOTA